НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
"КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ"

Факультет (інститут) ЕЛЕКТРОНІКИ

Кафедра ЗВУКОТЕХНІКИ ТА РЕЄСТРАЦІЇ ІНФОРМАЦІЇ

В. М. Співак

Лабораторні роботи з курсу:

"Теорія прийняття рішень та системний аналіз ”

6.050903 - Телекомунікації, спеціальності
Телекомунікаційні системи та мережі
(шифри та назви напрямів, спеціальностей)

Методичні вказівки

Київ - 2016

УДК 621.382.2 / 3. (075.8)
ББК 32.844 1я73 Р83

Автори:
В.М. Співак, к.т.н., доцент, с.н.с., проф. кафедри ЗТРІ.

Рецензенти:
С.К. Мещанінов, д-р. техн. наук, професор Дніпродзержинського державного технічного університету;
М.Б. Гумен, канд. техн. наук, професор Національного авіаційного університету (м. Київ);

Рекомендовано
Кафедрою ЗТ та РІ Київського політехнічного інституту
(протокол № 11 від 11.06.20146 р.)

Співак В.М.
Лабораторні роботи з курсу: "Теорія прийняття рішень та системний аналіз", шифр 050903 - Телекомунікації, спеціальності - Телекомунікаційні системи та мережі: Методичні вказівки. – К: Політехніка, 2016. – 33 с.

У методичних вказівках розглянуто широкий круг питань, пов’язаних з вивченням, аналізом, моделюванням під час проведення лабораторних робіт з курсу: "Теорія прийняття рішень та системний аналіз". Методичні вказівки призначені для студентів технічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

УДК 621.382.2 / 3. (075.8)

Лабораторные роботы на темы

1. Раскрытия неопределенностей целей

Цель работ: получить навыки нахождения рационального компромисса при раскрытии неопределенностей целей, ситуаций, взаимодействия и противодействия субъектов, научиться определять область Парето на заданном интервале и сужать ее, используя приемы технических ограничений.

Теоретические сведения

Задачи раскрытия целевой неопределенности относятся к классу **формализованных задач**, т.е. к такому классу задач, для которых можно построить математические модели или вычислительные алгоритмы, позволяющие по исходной информации найти данные, получение которых является целью задачи.

Следует обратить внимание на две особенности данного типа задач.

Во-первых, для формализуемой задачи не является обязательным существование математической модели, связывающей исходную информацию, исходные данные с искомыми результатами. Достаточно существования определенного алгоритма, последовательное выполнение операций которого позволяет получить искомый результат по исходной информации.

В качестве примера подобного класса задач можно указать некоторые задачи имитационного моделирования. Например, определение времени наработки определенного вида отказа объекта.

Во-вторых, понятие “формализуемая задача” не является синонимом “разрешимая задача”. Задача может быть формализуемой, но не разрешимой. Пример - транспортная задача нахождения оптимального маршрута для последовательного посещения n пунктов. Задача не только формализуема, но и имеет точный алгоритм решения - последовательный перебор вариантов маршрутов. И вместе с тем задача не разрешима: имеет трансвычислительную сложность уже при $n \geq 20$.

В рассматриваемом определении выражено главное свойство разных классов формализуемых задач - возможность установления математической или алгоритмической взаимосвязи и взаимозависимости исходных данных и конечного искомого результата задачи. Отсюда следует, что установление факта формализуемости практической задачи является самостоятельным вопросом. В дальнейшем мы при анализе данного типа задач будем полагать, что исходная задача представлена как формализованная. Очевидно, что понятия формализуемая и формализованная не синонимы и выражают различные стороны изучаемой задачи.

Формализованная задача - это задача, которая представлена для исследования в виде математической модели или алгоритма.

Формализуемая задача - это задача, которая потенциально может быть формализованной, т.е. задача, для которой только доказана возможность формализации.

Постановка задачи

Перейдем к изучению задач раскрытия неопределенностей целей. Прежде всего заметим, что неопределенность является типичным свойством практических задач СА, что обусловлено многообразием целей, свойств и особенностей объектов СА.

В общем случае при рассмотрении целостного объекта с точки зрения формулировки функции цели задачу можно рассматривать в общем виде

$$f_1(\bar{x}) \to \max_{x \in D}, f_2(\bar{x}) \to \max_{x \in D}, ..., f_n(\bar{x}) \to \max_{x \in D} \qquad (1)$$

Поскольку функции $f_k(\bar{x})$, k=1,2,..., n являются различными (по типу), то экстремум каждой функции достигается при своем значении x и нельзя найти такое значение x^0, при котором условия (1) выполняются одновременно для всех функций. Поэтому возникает задача нахождения такого значения x^0, при котором будет обеспечен рациональный компромисс заданных целей.

Для нахождения рационального компромисса разработано два основных подхода:

1) Сущность первого подхода - исключить из анализа заведомо неприемлемые варианты;
2) Сущность второго - найти способы приведения многоцелевой задачи к обычной задаче с одним критерием.

В основе первого подхода лежит идея, предложенная Парето: попытаться сократить множество исходных вариантов путем исключения из неформального анализа таких вариантов, которые заведомо являются непригодными. Реализация этой идеи осуществляется следующим образом.

Положим, что сделан некоторый выбор вектора $\bar{x}$ - обозначим его значение $\bar{x}^*$. Делаем теперь некоторый другой выбор $\hat{\bar{x}}$ такой, что для всех целевых функций

$$f_j(\hat{\bar{x}}) \geq f_j(\bar{x}^*), \; j = \overline{1,m} \qquad (2)$$

причем, хотя бы одно из неравенство строгое. Очевидно, что выбор $\hat{\bar{x}}$ предпочтительнее $\bar{x}^*$. Поэтому все векторы со значением $\bar{x}^*$, для которых выполняется (2), следует исключить из данного анализа. Подвергать неформальному анализу, сопоставлять между собой следует те векторы $\bar{x}^*$, для которых не существует такого значения $\hat{\bar{x}}$, хотя бы для одной из заданных целевых функций, для которого выполняется неравенство (2).

Множество всех значений $\bar{x}^*$, для которых невозможно подобрать $\bar{x}$ из условия (2), называется множеством **Парето**, а вектор $\bar{x}^*$ называется **не улучшаемым вектором результатов (вектор Парето).**

2. Множество Парето

Известно множество f целевых функций $f_j(\bar{x})$, заданных на множестве D, где

$$f = \left\{ f_j(\bar{x}) \middle| \; j = \overline{1,n};\; x \in D \right\},$$

$$D = \left\{ \bar{x} \middle| \; x^- \le x \le x^+ \right\}.$$

Найдем такое множество Γ значений $\bar{x}^* \in D$, которое делит исходное множество D на два множества: множество Π и множество $\overline{D}$, где

$$\Pi \bigcup \overline{D} = D; \Pi \bigcap \overline{D} = 0. \tag{3}$$

Множество Π состоит из таких значений $\bar{x}_{k_1} \in D$, для которых для всех $j = \overline{1,n}$ выполняется условие

$$f_j(\bar{x}_{k_1}) \ge f_j(\bar{x}^*). \tag{4}$$

Множество Π определяется соотношением

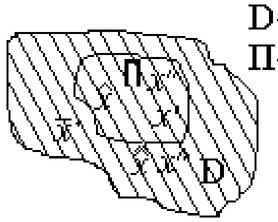
$$\Pi = \left\{ \bar{x} \middle| \; \bar{x} = \bar{x}_{k_1};\; \bar{x}_{k_1} \in D;\; f_j(\bar{x}_{k_1}) \ge f_j(\bar{x}^*);\; j = \overline{1,n} \right\}.$$

Множество $\overline{D}$ состоит из таких $\bar{x}_{k_2} \in D$, для которых хотя бы для одной функции $f_j(\bar{x}_{k_2})$ выполняется условие $f_j(\bar{x}_{k_2}) > f_j(\bar{x}^*)$. Множество $\overline{D}$ описывается следующим образом

$$D = \left\{ \bar{x} \middle| \; \bar{x} = \bar{x}_{k_2};\; \bar{x}_{k_2} \in D;\; f_j(\bar{x}_{k_2}) < f_j(\bar{x}^*);\; j = [1,n] \right\}.$$

Вектор $\bar{x}^* \in D$ принято называть вектором неулучшаемых для множества f результатов, а множество Π, удовлетворяющее условию (4), называют множеством Парето.

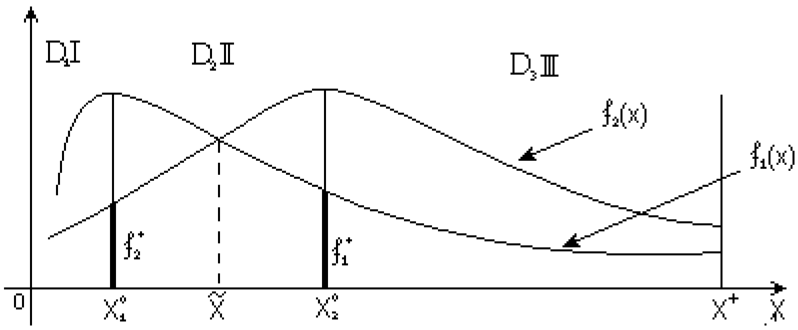
В силу условия (4) множество Γ является границей множества Парето. В соответствии с (3) имеем $\overline{D} = D \setminus$ Ï .



D-исходное множество;
П-множество Парето.

Поэтому все варианты, которые принадлежат $\overline{D}$, исключаются из рассмотрения.

<u>Пример.</u> Пусть требуется выделить множество Парето в области $D \in [0, x^+]$



Разобьем заданное множество D на три множества: $D = D_1 \bigcup D_2 \bigcup D_3$.

$D_1 \in [0, x_1^0)$, где x_1^0, точка значения x, при котором $f_1(x)$ достигает максимума

$$f_1(x_1^0) = \max_{x \in D} f(x),\ x \in [0, x_1^0)$$

$D_2 \in [x_1^0, x_2^0]$, где x_2^0 - такое значение x, при котором $f_2(x)$ достигает максимума

$$f_2(x_2^0) = \max_{x \in D} f(x),\ x \in [x_1^0, x_2^0].$$

$D_3 \in (x_2^0, x^+]$. Сравнивая значения функций $f_1(x)$, $f_2(x)$ в областях D_1 и D_2, имеем $f_2(x)|_{x \in D_1} < f_2(x)|_{x \in D_2}$, т.е. значения функции $f_2(x)$ для любого $x \in D_1$ меньше, чем значения $f_2(x)$ для любого $x \in D_2$. Для $f_1(x)$ имеем $f_1(x)|_{x \in D_1} \leq f_1(x)|_{x \in D_2}$ (соизмеримы), то есть область D_1 заведомо хуже области D_2 по целевой функции $f_2(x)$.

Аналогично, для области D_3 значения функции $f_1(x)$ для любого $x \in D_3$ меньше, чем значение $f_1(x)$ для любого $x \in D_2$, т.е. $f_1(x)|_{x \in D_3} < f_1(x)|_{x \in D_2}$. А для $f_2(x)$ имеем $f_2(x)|_{x \in D_3} \leq f_2(x)|_{x \in D_2}$ (соизмеримы), то есть область D_3 заведомо хуже области D_2 по целевой функции $f_1(x)$. Таким образом, из области D исключается область D_1 и область D_3. Область D_2 является множеством Парето. Для данной области выполняются критерии:

$$f_1(x)|_{x \in D_2} \geq f_1^+$$

$$f_2(x)|_{x \in D_2} \geq f_2^+.$$

В соответствии с принципом Парето рациональное решение модельной задачи (рациональный компромисс в многоцелевой задаче) необходимо искать среди x, принадлежащих множеству Парето. Принцип Парето не выделяет единственного решения, но он позволяет сузить множество возможных альтернативных решений. В рассматриваемом примере рациональное решение необходимо искать в области D_2. Но вопрос о том, какое решение (или какое значение $x \in D_2$) является оптимальным - остается открытым.

Во всех рассматриваемых случаях множество Парето позволяет получить дополнительную информацию, которая дает качественную оценку при сопоставлении различных вариантов. На рассмотренном примере видно, что в точке $\tilde{x}$ имеет место равенство

$$f_1(\tilde{x}) = f_2(\tilde{x}).$$

Какой из рассмотренных вариантов является предпочтительным определяет ЛПР. Если ЛПР полагает, что критерии равнопрочны, то рациональным является вариант $\tilde{x}$, когда $f_1(\tilde{x}) = f_2(\tilde{x})$. Если более важной является цель $f_1(x)$, то, очевидно, рациональное решение лежит в интервале $[x_1^0, \tilde{x})$. Если более важной является цель $f_2(x)$, то рациональное решение лежит в интервале $(x, x_2^0]$. Однако, в двух последних случаях конкретная степень предпочтения единой цели над другой остается субъективной мерой ЛПР.

3. Сужение множества Парето

Сужение множества Парето осуществляется при помощи принципов минмакса или максмина, или их одновременном использовании (при сужении интервала с 2-х сторон).

Вариант 1.

Введем для каждого значения x функцию,

$$F(x) = \min_{i \in \overline{1,m}} \frac{f_i(x)}{f_i^*} \tag{5}$$

и будем определять такие значения x^0, чтобы выполнялось условие $F(x^0) = \max_{x \in D} F(x)$, где D- допустимая многомерная область изменения вектора x, заданная, например, конструктивными ограничениями. При такой постановке задачи ее решение гарантирует, что в наихудшем случае, т.е. для $\min$ возможного отношения $\frac{f_i(x)}{f_i^*}$ будет обеспечено максимальное значение $F(x)$. Здесь рассматривается максимальная задача обеспечения.

Вариант 2.

Введем функцию

$$F(x) = \max_{i \in \overline{1,m}} \frac{f_i(x)}{f_i^*} \tag{6}$$

и будем определять такое значение x^0, при котором функция $F(x)$ имеет минимальное значение, т.е. $F(x^0) = \min_{x \in D} F(x)$. При данной постановке задачи ее решение гарантирует, что в наихудшем случае, т.е. для $\max$ возможного отклонения $\frac{f_i(x)}{f_i^*}$, будет гарантировано минимальное отклонение, т.е. здесь рассматривается минимаксная задача.

Отличие вариантов 1 и 2 состоит в том, что они физически определяют разные условия оптимальности. Вариант 1 обеспечивает максимально возможное отклонение среди всех $f_i(x)$от их заданных значений f_i^*, поскольку данное отклонение обеспечивается для наихудшего случая, т.е. обеспечивается

$$F_1(x^0) = \max_x \min_i \frac{f_i(x)}{f_i^*} \tag{12}$$

Вариант 2 решает обратную задачу - обеспечивает минимально возможное отклонение всех $f_i(x)$ от заданных значений f_i^*, поскольку данное отклонение обеспечивается для наихудшего случая (в рассматриваемой постановке), т.е. обеспечивается

$$F_2(x^0) = \min_x \max_i \frac{f_i(x)}{f_i^*} \tag{13}$$

4. Раскрытие неопределенности действия партнера или противника

1. **Задача взаимодействия двух партнеров**.

Пусть мы рассматриваем некоторый абстрактный рынок, на котором взаимодействуют два субъекта, причем их отношения не являются противодействующими. Каждый из субъектов обладает своей целевой функцией:

$f_1(x_1, x_2)$ - целевая функция первого субъекта, а x_1 - параметры, которыми управляет первый субъект;

$f_2(x_1, x_2)$ - целевая функция второго субъекта, а x_2 - параметры, которыми управляет второй субъект.

При этом предполагается, что между субъектами происходит обмен информации только об объемах производства и других показателях, которые характеризуются векторами x_1 и x_2, но при этом не сообщаются функции цели.

Принцип гарантированного результата заключается в том, что будет найдено наилучшее решение для наихудшего случая.

Субъект I выбирает свои параметры x_1 и передает их субъекту II, тот, имея информацию о значениях параметров x_1, выбирает для себя такую стратегию, которая будет максимизировать его целевую функцию и передает выбранные им значения параметров x_2 I-му субъекту, тот, в свою очередь, корректирует свои параметры, максимизируя свою функцию полезности. При таком подходе появляется гарантия того, что даже при выборе вторым субъектом таких параметров, которые приводят к минимизации целевой функции первого субъекта, первый имеет шанс подобрать свои параметры таким образом, чтобы получить наилучший результат для наихудшего случая.

2. Задача противодействия.

В задаче противодействия можно выделить несколько принципиальных особенностей:

1. стороны не только не сообщают друг другу какие-либо свои действия, но сознательно вносят дезинформацию, как о своих целях, так и о ситуации.
2. ситуации зависят не только от природных условий, но и от действий сторон.
3. действия сторон приводят к изменению параметров и целей.
4. цели сторон являются противоположными.

Каждый участник имеет свою функцию цели вида: $f_{ij}\left(x_i, x_j\right)$.

Решение проводиться в двух направлениях.

1. Ориентируется на гарантированный результат в наихудшем случае.

2. Ориентируется на наиболее вероятный вариант действия другой стороны и обеспечивает для себя наилучший вариант в этих условиях.

В данной работе мы будем рассматривать противодействие двух участников, каждый из которых имеет свою функцию цели $f_{12}(x_1, x_2)$ и $f_{21}(x_1, x_2)$ соответственно, а также диапазоны изменения параметров x_1 и x_2. Гарантированный результат можем определить по следующим формулам:

$$f_{12}^* = \max_{x_1} \min_{x_2} \quad f_{12}(x_1, x_2)$$

$$f_{21}^* = \max_{x_2} \min_{x_1} \quad f_{21}(x_1, x_2)$$

Область Парето.

Следующим этапом решения задачи является нахождение области Парето по заданным ограничениям типа неравенств, для этого решаем:

$$f_{12} - f_{12}^* = 0 \quad f_{21} - f_{21}^* = 0$$

Находим область, в которой выполняются, например, неравенства $f_{12} \geq f_{12}^*$, $f_{21} \geq f_{21}^*$. Значения параметров x_1 и x_2, что удовлетворяют данным неравенствам и дадут нам область Парето.

Чебышевский радиус.

Далее определяем те значения x_1^* и x_2^*, при которых $\Delta = \min_{x_1, x_2} \max_i \Delta_i$, где Δ_i - это отклонения целей от значений при гарантированном результате (чебышевский радиус или чебышевское отклонение).

$$\Delta_1 = \left| f_1(x_1, x_2) - f_1^* \right|$$

$$\Delta_2 = \left| f_2(x_1, x_2) - f_2^* \right|$$

ЗАДАНИЕ

При заданных целевых функциях $f_1(x)$, $f_2(x)$ и пороговых ограничениях f_1^*, f_2^* определить область Парето на заданном интервале [x_1, x_2] при выполнении условий $f_1(x) \ge f_1^*$, $f_2(x) \ge f_2^*$. Сузить область Парето, используя приемы технических ограничений.

При решении уравнений все вычисления провести с точностью до 0.0001, при сужении интервалов значения границ округлить до 0.001 и шаг сетки брать равным 0.001.

Целевые функции			**Ограничения** $f_1(x) \ge f_1^*$, $f_2(x) \ge f_2^*$.		**Значения для** x_1, x_2	
№	$f_1(x)$	$f_2(x)$	f_1^*	f_2^*		
1	$-5+1{,}6x+1{,}5x^2$	$275{,}5-0{,}5x^2$	101	163	5	20
2	$7+1{,}3x+5x^2$	$105-5x^2$	15.3	80	0	7
3	$\dfrac{30+5x^2}{24-2x}$	$40-7x$	2.5	22	1	6
4	$100\log(x)$	$100-x^2$	60	19	0	10
5	$30+7x-6x^2$	$10+3x$	21	11	0	4
6	2^x	$9-x^2$	2	6	0	4
7	x^x	$4-x^2$	1	0.76	0	3
8	$\sin x$	$4-x^2$	$\sqrt{2}/2$	0.5	0	2
9	$2-3x+x^3$	$16-x^2$	3	1	2	4
10	$20+6x-3x^2$	$9\ln(x)+9$	20	10	1	5
11	$11+6x+x^2$	$6-x^2$	3	2	0	3
12	2^x	$5+2x+x^3$	5	15	1	5
13	$0.8\exp\left(-2(x-3)^2\right)$	$10-6x+x^2$	0.2	1	1	5
14	$20x^{-1}$	$5+6x-x^{1{,}5}$	5	12	1	5
15	$0.8\exp\left(-2(x-3)^2\right)$	$2x^{-1}+0.25$	0.4	0.5	1	5
16	3^{x+1}	$5+4x-3x^2$	1	3	1	3
17	$3-0.75x$	$-5+6x-x^2$	1	2	0	5
18	$\sqrt{5x^2+10}$	$3-0.5x^2$	10	6	1	6
19	$15\sin(x+1)$	$10\cos(2x-2.4)+12$	12.82	16	6	8
20	$10-9x+51x^2-x^3$	$3-x^{-1}$	1	2.333	0	4
21	$1-x^2$	$\lvert x\rvert$	-2	2	-2	2
22	$3+12x+0.4x^3$	$\sin(x^2)+7x^2$	50	10	0	4
23	$5\lvert x-2\rvert+10\lvert x-3\rvert$	$15+4x$	25	23	0	5
24	$2+0.5\exp(x)$	$8+x^2$	3	7	-3	3
25	$-32-x+10x^2$	$10+x-32x^2$	0.001	-10	-2	2

26	$5log(x+9)$	$-12+4x$	10	2	0.001	5
27	$9-6x+x^2$	$18-9x-0.1x^2$	45	10	-5	4
28	$1-1.6x+7x^2$	$6+8x-3x^2$	45	5	-2	2
29	$1-x+x^2$	$56-x-3x^2$	15	5	-5	2
30	$1+ln(x)$	$-1+x+x^2$	1	-0.25	0.001	1.5

Лабораторные роботи на выбор студентов

Лабораторна робота № 1

Тема: Знаходження оптимальних рішень

Мета: дослідити використання критеріїв та методів для розв'язання одно- та багатокритеріальних задач прийняття рішень.

Теоретичні відомості

Задача прийняття рішень (класична постановка задачі):

При заданих значеннях детермінованих факторів, з урахуванням стохастичних та невизначених факторів, знайти оптимальні значення керованих факторів із областей їх допустимих значень, які б оптимізували заданий критерій.

$$\mathbf{Q} = < Q, A, I, B, D >$$

де Q – критерій; A – множина альтернатив; I – наявна інформація; B – особливості особи, яка приймає рішення; D – правила вибору (прийняття рішення - ПР).

Класичні критерії прийняття рішення

Мінімаксний (MM) $Z_{mm} = \max\limits_{i} (\min\limits_{j} f_{ij})$

Байєса-Лапласа (BL) $Z_{BL} = \max\limits_{i} \sum\limits_{j=1}^{n} f_{ij} \cdot p_j$

Критерій Севіджа (S) $Z_S = \min\limits_{i} \max\limits_{j} (\max\limits_{i} f_{ij} - f_{ij})$

Похідні критерії прийняття рішення

Критерій Гурвиця (HW) $Z_{HW} = \max\limits_{i} \left(c \cdot \min\limits_{j} f_{ij} + (1-c) \cdot \max\limits_{j} f_{ij} \right)$

Критерій Гермейєра (G) $Z_G = \max\limits_{i} \left(\min\limits_{j} f_{ij} p_j \right)$

Багатокритеріальна задача ПР має вигляд:

$$< Q, A, I, B, D >,$$

$$\mathbf{Q}=\{Q_1,Q_2, \ldots, Q_N\},$$

де **N** - кількість критеріїв; Q - скінчена множина (вектор) критеріїв.

Для розв’язання багатокритеріальних задач використовується метод аналізу ієрархій (Analytic Hierarchy Process).

*Основні етапи **АНР**:*

1. Структуризувати задачу у вигляді ієрархічної структури:
   - цілі;
   - критерії;
   - альтернативи.
2. Заповнити матрицю попарних порівнянь за переважністю для критеріїв.
3. Заповнити матрицю попарних порівнянь для альтернатив за кожним із критеріїв.
4. Обчислити коефіцієнти важливості для критеріїв та альтернатив.
5. Обчислити кількісний індикатор якості кожної альтернативи за формулою:

$$Q^{ГЛ}(a_j) = \sum_{i=1}^{N} w_i V_{ij},$$

де $Q^{ГЛ}(a_j)$ - глобальний критерій для альтернативи a_j; w_i - ВКВК окремого критерію Q_i; V_{ij} - коефіцієнт важливості альтернативи a_j за критерієм Q_i.

Найкращою вважається альтернатива з максимальним значенням $Q^{ГЛ}$.

Порядок виконання роботи

1. Скласти та розв’язати задачу прийняття рішення у відповідності до варіанту, використовуючи необхідні критерії ПР або метод аналізу ієрархій (МАІ).

Таблиця 1

Варіанти завдань

Варі-ант	Клас задач ПР	Використати	Кількість альтернатив	Стани природи	Кількість критеріїв
1	однокритеріальна	класичні критерії	10	10	
2	багатокритеріальна	МАІ	5		2/3
3	однокритеріальна	класичні та похідні	8	12	
4	багатокритеріальна	МАІ	3		5
5	однокритеріальна	похідні	12	8	

6	багатокритеріальна	МАІ	4		4

2. Для варіантів 1,3,5 необхідно обов'язково використати декілька критеріїв; для решти – розрахувати індекс узгодженості та відношення узгодженості. Результати представити у вигляді таблиць.

Склад звіту

1. Постановка задачі.
2. Математична модель.
3. Текст програми та результати роботи.
4. Висновки.

Контрольні запитання

1. Сформулювати постановку одно- та багатокритеріальної задач ПР.
2. Поясніть сутність класичних критеріїв ПР?
3. Поясніть сутність похідніх критеріїв ПР?
4. Сформулюйте суть методу МАІ, назвіть переваги та недоліки.
5. Наведіть приклади одно- та багатокритеріальної задач ПР.

Література

1. Колодний В.В. Основи теорії прийняття рішень. Навчальний посібник. Вінниця: ВДТУ, 2003. – 70 с.
2. Бодров В.И., Лазарева Т.Я., Мартемьянов Ю.Ф. Математические методы принятия решений: Учеб. пособие. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. тех. ун-та, 2004. – 124 с.
3. Эддонс М., Стенсфильд Р. Методы принятия решений. М.: Аудит, ЮНИТИ, 1997. – 590 с.

Лабораторна робота № 2

Тема: Методи пошукової оптимізації функцій однієї змінної

Мета: дослідити використання методів звуження інтервалу для розв'язання задачі одномірної оптимізації.

Теоретичні відомості

Оптимізація – це пошук найкращого рішення. В кожній задачі оптимізації використовуються такі поняття як критерій, керовані змінні та цільова функція.

Критерій – це показник, який дозволяє визначити якість отриманого рішення задачі.

Керовані змінні – це такі параметри задачі, значення яких можна змінювати.

Цільова функція – це функція, що пов'язує керовані змінні та критерії таким чином, що дозволяє обчислити значення критерію при довільних значеннях керованих змінних.

Методи звуження інтервалу використовують таку теорему: якщо цільова функція *f(x)* унімодальна, неперервна і в точці x^* має оптимум, то для точок x_1, x_2, визначених за умовою $a < x_1 < x_2 < b$ існує два правила:

1) якщо функція $f(x_1) > f(x_2)$, то оптимум x^* знаходиться на відрізку $[x_1; b]$, $a \to x_1$;
2) якщо $f(x_1) < f(x_2)$, то оптимум x^* знаходиться на відрізку $[x_2; a]$, $b \to x_2$;
3) якщо не виконуються умови першого та другого правила, то оптимум знаходиться на відрізку $[x_1; x_2]$, $a \to x_1$, $b \to x_2$.

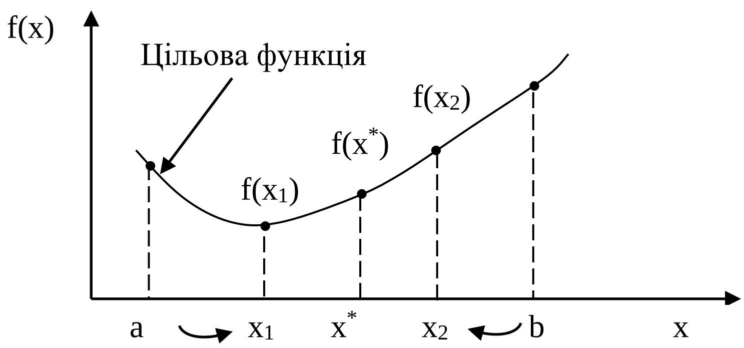


Рис. 1. Метод половинного ділення

З використанням даної теореми розроблено декілька алгоритмів пошуку оптимуму:
1) алгоритм половинного ділення;
2) метод дихотомії;
3) алгоритм методу золотого перерізу;
4) Фібоначчі.

Порядок виконання роботи

1. Скласти блок-схему алгоритму та розробити програму оптимізації функції $y = f(x)$, унімодальної на інтервалі $[a; b]$. Вихідні дані брати з таблиці 2 у відповідності до варіанту.

Таблиця 2

Варіанти завдань

Варі-ант	Цільова функція $f(x)$	Інтервал невизначе-ності $[a; b]$	Тип шуканого оптимуму	Точність рішення ε	Метод оптимізації
1	$y = 2^x / (0{,}5 - x)$	$[0{,}6; 3{,}6]$	max	0,01	половинного ділення
2	$y = (x-5)^2 + e^{x/2}$	$[-10; 10]$	min	0,1	дихотомії
3	$y = -e^{2+0{,}1x}$	$[-1; 1]$	max	0,01	золотого перерізу
4	$y = \sqrt{x^2 - 5x + 12}$	$[-20; 20]$	min	0,1	Фібоначчі
5	$y = \sin(x)\ln(x)$	$[13; 17]$	max	0,01	половинного ділення
6	$y = -x \cdot e^{-0{,}1x}$	$[0; 50]$	min	0,1	дихотомії
7	$y = -x^2 + 3x - 12$	$[-3; 3]$	max	0,01	золотого перерізу
8	$y = -\lvert x^3 - 50x \rvert$	$[0; 7]$	min	0,1	Фібоначчі

2. Результати пошуку оптимуму функції представити:

а) для методу половинного ділення таблицею вигляду

k	$a^{(k)}$	$b^{(k)}$	$L^{(k)}$	$x_1^{(k)}$	$x_m^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$y_1^{(k)}$	$y_m^{(k)}$	$y_2^{(k)}$
1									
...									
k									
$k+1$									

б) для методу дихотомії таблицею вигляду

k	$a^{(k)}$	$b^{(k)}$	$L^{(k)}$	$x_1^{(k)}$	$x_m^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$y_1^{(k)}$	$y_2^{(k)}$
1								
...								
k								
$k+1$								

в) для методів золотого перерізу і Фібоначчі таблицею вигляду

k	$a^{(k)}$	$b^{(k)}$	$L^{(k)}$	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$y_1^{(k)}$	$y_2^{(k)}$
1							
...							
k							

$k+1$							

де k – номер кроку пошуку; L – довжина інтервалу невизначеності.

3. Достовірність отриманих результатів перевірити, використовуючи математичний пакет MathCAD.

4. Зробити висновки. Оформити звіт

Склад звіту

1. Титульний аркуш.
2. Короткі теоретичні відомості.
3. Завдання.
4. Блок-схема та лістинг програми.
5. Результати оптимізації за розробленою програмою.
6. Результати дослідження у MathCAD.
7. Висновки.

Контрольні запитання

1. Що таке цільова функція і проектні параметри ?
2. Що таке унімодальна функція ?
3. Особливості алгоритмів оптимізації одномірних функцій.
4. Суть алгоритму методу половинного ділення.
5. Як можна підвищити ефективність методу оптимізації ?
6. Суть алгоритму методу золотого перерізу та Фібоначчі ?

Література

1. Методи оптимізації складних систем. Навчальний посібник. І.В.Кузьмін, М.М.Биков, С.М.Москвіна. – Вінниця: ВДТУ, 2003.
2. Жилинскас А., Шалтянис В. Поиск оптимума. – М.:Наука.-1989. С. 22-28.
3. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс. – М.:”Радио и связь”, 1988
4. Дегтярев Ю.И. Методы оптимизации: учебное пособие. – М.: Советское радио, 1980.
5. Ашманов С.А., Тимохов А.В. Теория оптимизации в задачах и упражнениях. – М.: Наука, 1991.
6. Полак Е. Чисельні методи оптимізації. – М.: Мир, 1974.
7. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. – М.: Наука, 1986.

Лабораторна робота № 3

Тема: Методи нульового порядку функції багатьох змінних

Мета: дослідити використання методів нульового порядку для розв'язання задачі багатомірної оптимізації

Теоретичні відомості

До **методів нульового порядку** відноситься пошук за симплексом (не плутати з симплекс методом в лінійному програмуванні), метод покоординатного спуску Гауса-Зейделя, випадковий пошук та інші. Розглянемо основні ідеї означених методів.

Пошук за симплексом [4] полягає в тому, що при пошуку оптимуму в просторі незалежних змінних будується регулярний симплекс і обчислюється значення цільової функції в його вершинах. Регулярний симплекс в n-мірному просторі представляє собою багатогранник, який має n+1 рівновіддалених вершин. Наприклад, у випадку двох змінних симплексом є рівнобічний трикутник; в трьохвимірному просторі симплекс представляє собою тетраедр. Після побудови симплекса визначається вершина, яка має найбільше значення цільової функції. На рис.2 це вершина з номером 1.

Далі знайдена вершина проектується через центр ваги інших вершин симплекса (точки 2 і 3) в нову вершину (точка 4). Точки 2, 3 та 4 використовуються в якості вершини нового симплекса. Таким чином, трикутник немов би перевертається через сторону з найменшим значенням цільової функції. При пошуці мінімуму використовуються наступні два правила.

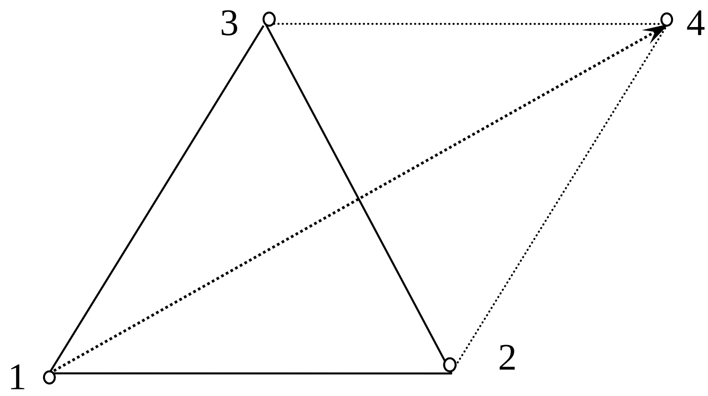


Рис. 2. Ілюстрація ідеї метода пошуку за симплексом

Правило “накриття” точки мінімуму

Якщо вершина, якій відповідає найбільше значення цільової функції, побудована на попередній ітерації, то замість неї береться вершина з меншим значенням цільової функції.

Правило циклічного руху

Якщо деяка вершина симплекса не виключається на протязі багатьох ітерацій, то необхідно зменшити розмір симплекса.

Пошук завершується, коли розмір симплекса або різниця між значеннями функції в вершинах симплекса стають достатньо малими. Недоліком цього метода є велика кількість ітерацій; крім того він не завжди забезпечує розв'язок задачі.

Ідея метода **покоординатного спуску** полягає в тому, що спочатку робиться пробний крок в напрямі, який паралельний до однієї з координатної вісі і обчислюється значення цільової функції. Якщо значення цільової функції зменшується, то рух продовжується далі в цьому ж напрямку, а якщо функція збільшується, то ми повертаємося назад і робимо пробний крок в іншому напрямку. І так продовжується до тих пір, доки не буде знайдена оптимальна точка (рис 3). Особливість цього методу полягає в тому, що пошук оптимуму проводиться виключно паралельно координатним осям. На початку пошуку вибирається великий крок і перевіряється значення функції по всім напрямкам. Якщо буде зростання функції по всім напрямкам, то необхідно зменшити крок.

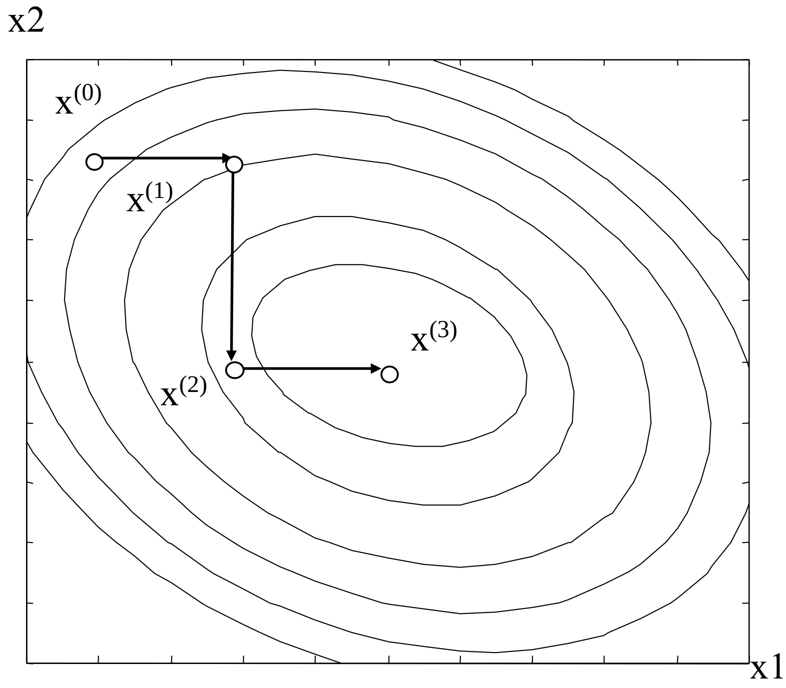


Рис. 3. Ілюстрація покоординатного спуску

Недоліком цього метода є обмежені можливості при пошуку оптимуму. Метод застосовують тоді, коли залежність між змінними $x_1, x_2, \ldots, x_n$ практично відсутні.

Ідея **випадкового пошуку** полягає в тому, що вибір напрямку руху здійснюється випадково. Якщо цільова функція зменшується, то рух в вибраному напрямку продовжується, в протилежному випадку необхідно повернутися на один крок назад та знову випадково обрати напрямок пошуку і т.д.

Усі випадкові методи пошуку реалізуються за ітераційною формулою:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \xi^{(k)},$$

де k – номер ітерації;

$\xi,^{(k)}$ - випадкова величина.

Популярність методів випадкового пошуку пояснюється їхньою простотою та широкими можливостями для користувачів самому модифікувати методи.

Порядок виконання роботи

1. Скласти схему алгоритму та програму оптимізації функції $y = f(x_1, x_2)$ методом нульового порядку. Вихідні дані брати з таблиці 3 у відповідності до варіанту.

2. Достовірність отриманих результатів перевірити, використовуючи математичний пакет MathCAD.

3. Зробити висновки. Оформити звіт.

Таблиця 3

Варіанти завдань

Варіант	Цільова функція y	Точність рішення ε	Метод оптимізації
1	$y = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 4)^2$	0,001	Хука-Дживса
2	$y = x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2$	0,0001	Покоординатного спуску
3	$y = e^{x_1^2 + x_2^2} + 2x_1 - 3{,}5x_2$	0,001	Нелдера-Міда
4	$y = (x_1 + 3)^2 + (x_2 + 5)^2$	0,01	Хука-Дживса
5	$y = e^{2x_1^2 + x_2^2} + 1{,}1x_1 + 3{,}6x_2$	0,001	Покоординатного спуску
6	$y = e^{x_1^2 + 0{,}8x_2^2} + 1{,}2x_1 + 2x_2$	0,01	Нелдера-Міда

*Вибрати початкові параметри в залежності від особливостей методу й обраної функції.

Склад звіту:

1. Титульний аркуш.
2. Короткі теоретичні відомості.
3. Завдання.
4. Блок-схема та лістинг програми.
5. Результати оптимізації за розробленою програмою.
6. Результати дослідження у MathCAD.
7. Висновки.

Контрольні запитання

1. Класифікація методів безумовної оптимізації функцій багатьох змінних.
2. Особливості методів нульового порядку оптимізації багатомірних функцій.
3. Чому методи нульового порядку мають таку назву? Що мається на увазі?
4. Суть методів покоординатного спуску, Хука-Дживса та Нелдера-Міда.

Література

1. Методи оптимізації складних систем. Навчальний посібник. І.В.Кузьмін, М.М.Биков, С.М.Москвіна. – Вінниця: ВДТУ, 2003.
2. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс. – М.:”Радио и связь”, 1988
3. Дегтярев Ю.И. Методы оптимизации: учебное пособие. – М.: Советское радио, 1980.
4. Ашманов С.А., Тимохов А.В. Теория оптимизации в задачах и упражнениях. – М.: Наука, 1991.
5. Полак Е. Чисельні методи оптимізації. – М.: Мир, 1974.
6. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. – М.: Наука, 1986.

Лабораторна робота № 4

Тема: Градієнтні методи оптимізації функцій багатьох змінних

Мета: дослідити використання градієнтних методів для розв'язання задач багатомірної оптимізації.

Теоретичні відомості

Градієнтні методи відносяться до методів першого порядку. Особливість цих методів – це використання градієнта.

Градієнтом функції f(X) називається вектор, величина якого визначає швидкість зміни функції f(X), а напрямок співпадає з напрямком найбільшого зростання цієї функції. Вектор, який протилежний за напрямком градієнту називається *антиградієнтом*.

Всі методи першого порядку, базуються на ітераційній процедурі, яка реалізується за формулою:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \lambda^{(k)} \cdot \nabla f(X^{(k)}),$$

де k - номер ітерації;

$X^{(k)}$ – поточне наближення до розв'язку;

$\lambda^{(k)}$ –параметр, який характеризує довжину кроку;

$\nabla f(X^{(k)})$ – напрямок пошуку в n-мірному просторі керованих змінних.

Градієнтний метод є послідовністю кроків, кожний з яких складається з двох операцій:

1) визначення напрямку найбільшої крутизни спуска, тобто напрямок антиградієнта функції f(X).
2) переміщення в вибраному напрямку на задану відстань.

Градієнтний метод має свої недоліки. Для того, щоб рухатися завжди в напрямку антиградієнта, крок повинен бути невеликим. Тому їх буде багато. Але оскільки на кожному кроці необхідно постійно обчислювати градієнт, то наближення до оптимуму буде повільним.

Метод **найшвидшого спуску** є модифікацією градієнтного метода. Він відрізняється від градієнтного тим, що градієнт обчислюється тільки в початковій точці і рух в напрямку антиградієнта продовжується до тих пір, поки зменшується значення цільової функції f(X). Вибір кроку λ при переході від точки $X^{(k)}$ в $X^{(k+1)}$ визначається згідно умови:

$$\lambda^{(k)} = \min_{\lambda \geq 0} f(X^{(k)} + \lambda^{(k)} \cdot \nabla f(X^{(k)})),$$

тобто на кожному кроці розв'язується одномірна задача мінімізації.

Метод найшвидшого спуску має два недоліки: по-перше, методу властива поступова збіжність до точки мінімуму внаслідок малого $\nabla f(X)$ в околиці цієї точки, по-друге, необхідно розв'язувати задачу одномірної оптимізації – обирати на кожному кроці оптимальне значення $\lambda^{(k)}$. Головна перевага цього метода полягає в тому, що йому властива стійкість та простота обчислень. Використовують цей метод тоді, коли цільову функцію можна добре апроксимувати лінійною залежністю.

Порядок виконання роботи:

1. Скласти схему алгоритму та розробити програму пошуку локального мінімуму функції $y = f(x_1, x_2)$ градієнтним методом. Вихідні дані брати з таблиці 4 у відповідності до варіанту.

Таблиця 4

Варіанти завдань

Варіант	Цільова функція y	Початкова точка x^0	Початкова довжина кроку λ	Точність рішення ε	Метод оптимізації
1	$y = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 4)^2$	$[1,2; 3,4]$	0,1	0,001	Флетчера-Рівса
2	$y = x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2$	$[0,1; 0]$	0,01	0,0001	Найшвидшого спуску
3	$y = e^{x_1^2 + x_2^2} + 2x_1 - 3,5x_2$	$[0; 0]$	0,1	0,001	Градієнтного спуску
4	$y = (x_1 + 3)^2 + (x_2 + 5)^2$	$[-4; -9]$	0,1	0,01	Флетчера-Рівса
5	$y = e^{2x_1^2 + x_2^2} + 1,1x_1 + 3,6x_2$	$[-1; 0,5]$	0,1	0,001	Найшвидшого спуску
6	$y = e^{x_1^2 + 0,8x_2^2} + 1,2x_1 + 2x_2$	$[1; -0,2]$	0,1	0,01	Градієнтного спуску

2. Результати пошуку оптимуму функції представити таблицею вигляду:

Крок пошуку k	Поточна точка x	Значення функції y	Поточна довжина кроку λ	Градієнт G	Норма градієнта $\|G\|$
1					
. . .					
k					
. . .					
N					

3. Достовірність отриманих результатів перевірити, використовуючи математичний пакет MathCAD.

4. Зробити висновки. Оформити звіт.

Склад звіту

1. Титульний аркуш.
2. Короткі теоретичні відомості.
3. Завдання.

4. Блок-схема та лістинг програми.
5. Результати оптимізації за розробленою програмою.
6. Результати дослідження у MathCAD.
7. Висновки.

Приклад програми пошуку оптимуму функції двох змінних у MathCAD.

1. Записуємо цільову фнкцію

$$f(x1,x2) := e^{\left(x1^2+x2^2\right)} + 2\cdot x1 - 3.5\cdot x2$$

2. Визначаємо і виводимо частинні похідні цільової функції f'x1(x1,x2) і f'x2(x1,x2)

$$fx1(x1,x2) := \frac{d}{dx1}f(x1,x2) \quad fx1(x1,x2) \rightarrow 2\cdot x1\cdot \exp\left(x1^2 + x2^2\right) + 2$$

$$fx2(x1,x2) := \frac{d}{dx2}f(x1,x2) \quad fx2(x1,x2) \rightarrow 2\cdot x2\cdot \exp\left(x1^2 + x2^2\right) - 3.5$$

3. Розвязуємо систему рівнянь f'x1(x1,x2)=0 f'x2(x1,x2)=0, використовуючи процедуру given-find

Given

$fx1(x1,x2) = 0$

$fx2(x1,x2) = 0$

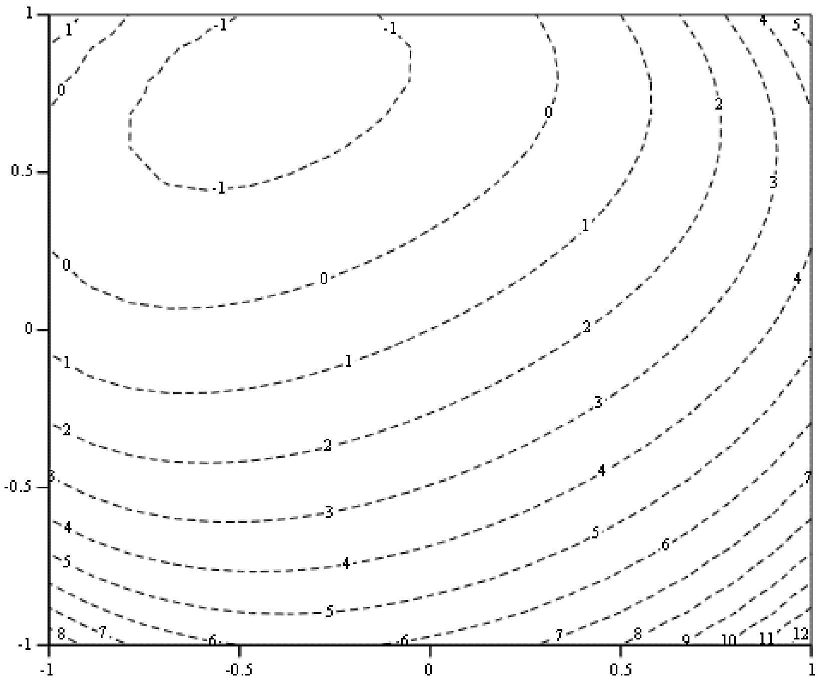
$$Find(x1,x2) \rightarrow \begin{pmatrix} -.44588749512269884770 \\ .78030311646472298348 \end{pmatrix}$$

4. Виводимо значення цільової функції в точці мінімуму x=-0.4459 y=0.7803

$f(-0.4459, 0.7803) = -1.38$

5. Будуємо лінії рівня цільової функції, використовуючи функцію CreateMesh

$Z := CreateMesh(f, -1, 1, -1, 1)$



Z

Контрольні запитання

1. Особливості алгоритмів оптимізації багатомірних функцій.
2. Що таке градієнт та антиградієнт?
3. В чому полягає суть градієнтних методів пошуку оптимуму?
4. Чим градієнтний метод відрізняється від методу найшвидшого спуску?

5. Суть методу Флетчера-Рівса.

Література

1. Методи оптимізації складних систем. Навчальний посібник. І.В.Кузьмін, М.М.Биков, С.М.Москвіна. – Вінниця: ВДТУ, 2003.
2. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс. – М.:"Радио и связь", 1988.
3. Дегтярев Ю.И. Методы оптимизации: учебное пособие. – М.: Советское радио, 1980.
4. Ашманов С.А., Тимохов А.В. Теория оптимизации в задачах и упражнениях. – М.: Наука, 1991.
5. Полак Е. Чисельні методи оптимізації. – М.: Мир, 1974.
6. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. – М.: Наука, 1986.

Лабораторна робота № 5

Тема: Дослідження залежності часу оптимізації від розмірності задачі

Мета: дослідити залежність часу оптимізації від розмірності задачі за допомогою відомих методів.

Теоретичні відомості

Збільшення кількості керованих змінних (розмірності) істотно ускладнює розв'язання задачі оптимізації. А при деякому значені починається різке зростання часу обчислення оптимуму (рис.4). Таке явище в оптимізації називається проблемою "прокляття" розмірності.

Однією з задач сучасних методів оптимізації є розробка ефективних алгоритмів, що дозволяють відсунути стіну складності. *Ефективним алгоритмом* вважається такий алгоритм, складність якого (кількість ітерацій) описується поліноміальною функцією від розмірності задачі.

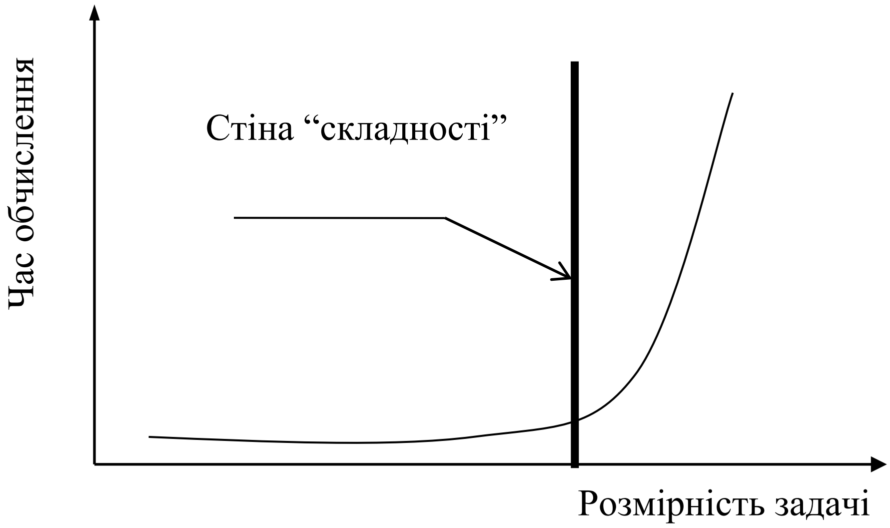


Рис. 4. Проблема "прокляття" розмірності

Порядок виконання роботи

1. Розробити програму для дослідження залежності часу розв'язання задачі безумовної оптимізації від кількості керованих змінних.
2. Вихідні дані брати з таблиці 5 у відповідності до варіанту.

Таблиця 5

Варіанти завдань

Варіант	Цільова функція $f(x)$	Початкова точка x^0
1	$y=\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-n)^2}{i^2}$	$x_i^0=2i,\ i=\overline{1,n}$

2	$y=\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i+7i)^2}{i}$	$x_i^0=0,\ i=\overline{1,n}$
3	$y=\sum_{i=1}^{n}(x_i-i)^4$	$x_i^0=\frac{i}{2},\ i=\overline{1,n}$
4	$y=\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i+i)^2}{0{,}1i^2}$	$x_i^0=i,\ i=\overline{1,n}$
5	$y=\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i+i)^4}{i}$	$x_i^0=5i,\ i=\overline{1,n}$
6	$y=\sum_{i=1}^{n}(0{,}1x_i+2i)^2$	$x_i^0=3,\ i=\overline{1,n}$

3. Для пошуку мінімуму функції використати будь-який градієнтний метод.
4. Експеримент провести в діапазоні від $n=2$ до $n=30$.
5. Результати експерименту представити таблицею 6.

Таблиця 6

Варіанти завдань

Кількість керованих змінних n	Час пошуку оптимуму t, сек
2	
...	
30	

6. Достовірність отриманих результатів перевірити, використовуючи математичний пакет MathCAD. За допомогою методу найменших квадратів апроксимувати отримані експериментальні дані функцією $a_0+a_1e^{a_2 n}$ та вивести графік цієї функції.
7. Зробити висновки. Оформити звіт.

Склад звіту

1. Титульний аркуш.
2. Короткі теоретичні відомості.
3. Завдання.
4. Блок-схема та лістинг програми.
5. Результати оптимізації за розробленою програмою.
6. Результати дослідження у MathCAD.
7. Висновки.

Контрольні запитання

1. Особливості алгоритмів оптимізації багатомірних функцій.
2. Класифікація методів безумовної оптимізації функцій багатьох змінних.
3. Як залежить час оптимізації від розмірності задачі?

4. Чи завжди при збільшенні розмірності задачі збільшується час оптимізації?
5. Які фактори впливають на час розв’язання задачі оптимізації?
6. Постановка задачі апроксимації.

Література

1. Методи оптимізації складних систем. Навчальний посібник. І.В.Кузьмін, М.М.Биков, С.М.Москвіна. – Вінниція: ВДТУ, 2003.
2. Дегтярев Ю.И. Методы оптимизации: учебное пособие. – М.: Советское радио, 1980.
3. Ашманов С.А., Тимохов А.В. Теория оптимизации в задачах и упражнениях. – М.: Наука, 1991.
4. Евдокимов А.Г. Минимизация функций и ее приложения к задачам автоматизированного управления инженерными сетями. – Х.: Вища шк., 1985. – 288 с.
5. Штовба С.Д. Методи оптимізації в середовищі Matlab. Лабораторний практикум: Навч. пос. – Вінниця, ВДТУ, 2001. – 56 с.

Приклад програми обробки результатів експерименту у MathCAD.

1. Задаємо значення змінних, необхідних для роботи з масивами

$ORIGIN := 1 \qquad N := 20 \qquad i := 2..N$

2. Вводимо значення часу оптимізації, отримані в результаті експерименту

$T := (2\ \ 2.5\ \ 3.2\ \ 4.5\ \ 6.2\ \ 8\ \ 10.6\ \ 14\ \ 19\ \ 26\ \ 38\ \ 52\ \ 76\ \ 106\ \ 140\ \ 200\ \ 280\ \ 400\ \ 600)^T$

3. Записуємо цільову функцію

$$g(a0, a1, a2) := \left| \begin{array}{l} z \leftarrow 0 \\ \text{for } \ j \in 1..N-1 \\ \quad z \leftarrow z + \left[T_j - \left(a0 + a1 \cdot e^{a2 \cdot j}\right)\right]^2 \end{array} \right.$$

4. Формуємо початкове наближення

$a0 := 2 \qquad a1 := 1 \qquad a2 := 1$

5. Знаходимо мінімум функції g(a0, a1, a2) за допомогою функції Minimize

$P := \mathrm{Minimize}(g, a0, a1, a2) \qquad P = \begin{pmatrix} 0.503 \\ 0.613 \\ 0.361 \end{pmatrix}$

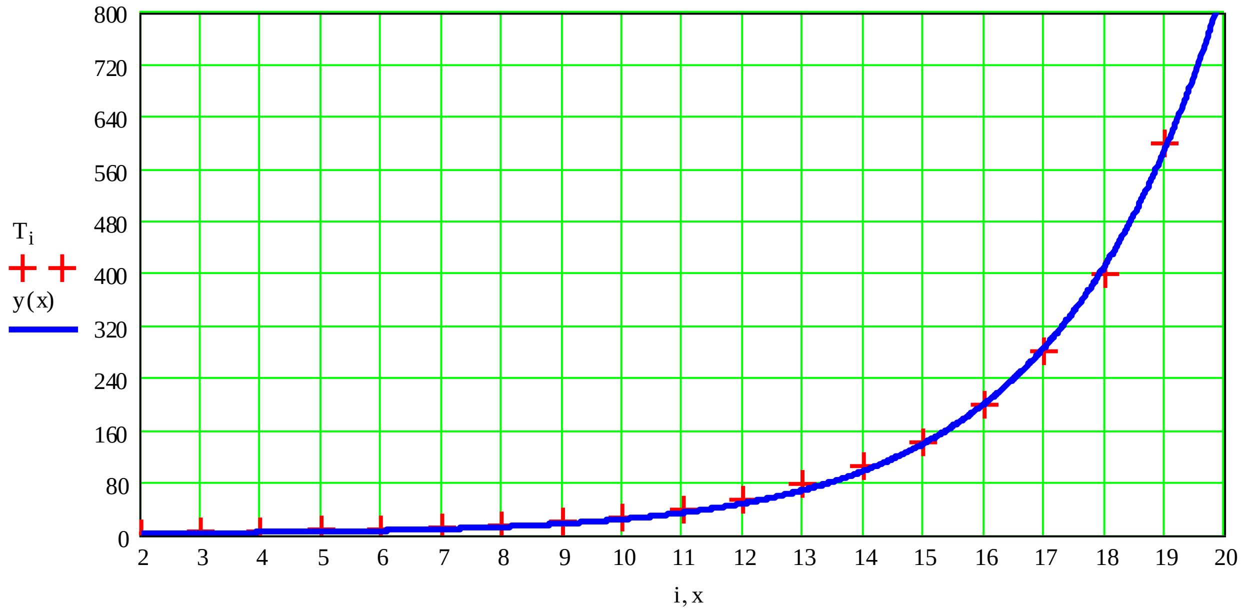
6. Визначаємо значення функції g(a0, a1, a2) в точці мінімуму

$$gmin := \left| \begin{array}{l} y \leftarrow 0 \\ \text{for } \ j \in 1..N-1 \\ \quad y \leftarrow y + \left[T_j - \left(P_1 + P_2 \cdot e^{P_3 \cdot j}\right)\right]^2 \end{array} \right. \qquad gmin = 495.88$$

7. Задаємо отриману апроксимувальну функцію

$y(x) := P_1 + P_2 \cdot e^{P_3 \cdot x}$

8. Виводимо значення експериментальних даних та графік апроксимувальної функції



Лабораторна робота № 6

Тема: Аналіз чутливості оптимального розв'язку задачі лінійного програмування

Мета: провести аналіз чутливості оптимального розв'язку задачі використовуючи програмні пакети MathCAD та MS Excel.

Теоретичні відомості

Аналіз чутливості – це процедура, яка дозволяє встановити залежність оптимального рішення до варіації початкових даних. Аналіз чутливості відіграє велику роль в задачах оптимізації. Аналіз чутливості потрібно проводити за двома причинами:

1. Деякі параметри задач лінійного програмування, такі, як фінансові кошти, запаси ресурсів можна регулювати. Аналіз чутливості дозволяє оцінити вплив зміни цих параметрів на оптимальне рішення. Якщо виявитися, що оптимальне рішення (наприклад, відношення прибутку до витрат) можна значно покращити за рахунок невеликих змін параметрів, то необхідно провести ці зміни.
2. В багатьох випадках оцінки параметрів отримуються шляхом статистичної обробки експериментальних даних. Тому такі оцінки не можуть бути точними. Якщо вдається визначити, які параметри в більшій степені впливають на значення цільової функції, то необхідно збільшити точність їх оцінок.

Важливу роль при аналізі чутливості виробничих задач відіграють тіньові ціни та маргінальні оцінки. Для цього використовують значення тіньових цін та маргінальні оцінки. Тіньові ціни визначають приріст максимального прибутку при використані додаткової одиниці деякого ресурсу. Значення маргінальної оцінки показує наскільки знижується максимальний прибуток при випуску одиниці цієї продукції. Більш детальна інформація про аналіз чутливості в задачах лінійного програмування наведена в [5].

Порядок виконання роботи

1. Самостійно придумати та розв'язати задачу лінійного програмування (кількість керованих змінних повинна бути не менша 4, кількість обмежень на значення керованих змінних – не менша 3).
2. Визначити зону нечутливості оптимального розв'язку задачі лінійного програмування до варіації початкових даних. Експерименти проводити у математичному пакеті MathCAD.
3. Ознайомитися з надбудовою MS Excel „Поиск решения" (див. довідкову систему і приклади розв'язку задач в Office\Samples\Solvsamp.xls) та отримати за її допомогою розв'язок задачі.
4. Зробити висновки. Оформити звіт.

Склад звіту

1. Титульний аркуш.
2. Короткі теоретичні відомості.

3. Змістовна постановка задачі. Формалізована постановка задачі.
4. Результати розв’язання задачі у MathCAD. Результати аналізу чутливості.
5. Результати розв’язання задачі у MS Excel.
6. Висновки.

Контрольні запитання

1. Постановка задачі лінійного програмування.
2. До якого класу задач оптимізації відноситься задача лінійного програмування?
3. Методи розв’язання задач лінійного програмування.
4. Основі етапи сиплекс-методу розв’язання задачі лінійного програмування.
5. З якою метою проводять аналіз чутливості оптимального розв’язку?

Література

1. Банди Б. Основы линейного программирования. – М.: Радио и связь, 1989. – 176 с.
2. Вентцель Е.С. Исследование операций. М.: Наука, 1980.
3. Пантелеев А.В. Методы оптимизации в примерах и задачах. – М.: Высш. шк., 2002. – 544 с.
4. Ашманов С.А., Тимохов А.В. Теория оптимизации в задачах и упражнениях. – М.: Наука, 1991.
5. Штовба С.Д. Методи оптимізації в середовищі Matlab. Лабораторний практикум: Навч. пос. – Вінниця, ВДТУ, 2001. – 56 с.
6. Реклейтис Г., Рейвиндран А., Рэгсдел К. Оптимизация в технике. Кн.1.- М.: Мир.- 1986.- 320с.

ДОДАТОК

Приклад програми обробки результатів експерименту у MathCAD.

1. Записуємо ціьову функцію

$f(x1, x2, x3, x4) := x1 + 2 \cdot x2 - x3 + x4$

2. Формуємо початкове наближення (можна задати будь-які числа

$x1 := 0 \quad x2 := 1 \quad x3 := 0 \quad x4 := 5$

3. Описуємо обмеження

Given

$x1 + 2x2 + x4 = 4$

$x1 + x2 + x3 = 8$

$x1 \geq 0 \quad x2 \geq 0 \quad x3 \geq 0 \quad x4 \geq 0$

4. Знаходимо мінімум цільової функції за допомогою функції Minim
(для пошуку максимуму використовують функцію Maximize)

$Reshenie := Minimize(f, x1, x2, x3, x4)$

5. Виводимо точку мінімуму та значення цільової функції в цій точ

$Reshenie^T = (0 \ \ 0 \ \ 8 \ \ 4)$

$f(0, 0, 8, 4) = -4$

Отчет должен содержать:

1. Титульный лист.
2. Решение задачи (листинг MathCad).
3. Графики функций.
4. Результаты работы.
5. Выводы.

Укладачі додатку:
Співак В.М.
Бакіко В.М.